ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1986

MATHEMATIQUES I

(2 pages dactylographiées)

P'

I.1. Soit A un polynôme à coefficients réels.

Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} A(t)\, e^{-t}\, e^{itx}\, dt$$ converge absolument.

I.2. a) Calculer $\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, e^{itx}\, dt$, n désignant un entier positif ou nul.

b) En déduire l'égalité

$$\int_0^{+\infty} A(t)\, e^{-t}\, e^{itx}\, dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}(0)}{(1-ix)^{k+1}}$$

$A^{(k)}$ désignant la $k^{ième}$ dérivée du polynôme A (avec $A^{(0)} = A$).

I.3. On suppose toujours que A est un polynôme à coefficients réels et on définit une fonction J_A de la variable réelle x par la relation

$$J_A(x) = \int_0^{+\infty} A(t)\, e^{-t}\, e^{itx}\, dt$$

Montrer que J_A est dérivable et que l'on a

$$\frac{d}{dx} J_A(x) = i \int_0^{+\infty} t\, A(t)\, e^{-t}\, e^{itx}\, dt$$

(on pourra se servir de la question I.2.).

I.4. On donne un entier $n \geqslant 0$. On désigne par $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On désigne par $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Montrer que, pour tout élément A de $\mathbb{R}_n[x]$ on peut écrire

pour tout x réel $\int_0^{+\infty} A(t)\, e^{-t} \cos tx\, dt = \frac{B(x^2)}{(1+x^2)^{n+1}}$

où B est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, déterminé de façon unique.
On définit ainsi une application φ_n de $\mathbb{R}_n[x]$ dans lui-même, visiblement linéaire, par la condition

$\varphi_n(A) = B$.

I.5.a) Soit A un polynôme à coefficients réels, tel que pour tout x réel

$$\int_0^{+\infty} A(t)\, e^{-t} \cos tx\, dt = 0$$

Etablir que $A = 0$.

b) Montrer que φ_n est bijective.

II.1. a) Etablir qu'il existe dans $\mathbb{R}_n[x]$ un élément unique dont l'image par φ_n est la constante 1.

b) Montrer qu'il existe dans $\mathbb{R}[x]$ un polynôme unique, que l'on notera désormais Q_n, tel que

$$\int_0^{+\infty} Q_n(t)\, e^{-t} \cos tx\, dt = \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que le degré de Q_n est au plus égal à n.

c) Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} xt\, Q_n(t)\, e^{-t} \sin tx\, dt = 2x^2 (n+1)(1+x^2)^{-(n+2)}$$

On pourra utiliser (I, 3°).

En déduire la relation, valable pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t(Q_n'(t) - Q_n(t)) + Q_n(t) = 2(n+1)(Q_n(t) - Q_{n+1}(t))$$

Calculer $Q_n(0)$.

Concours commun Centrale-Sup.Elec. Math I.Option P' 1986 page 85

II.2. Montrer que l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\int_0^{+\infty} t^2 Q_n(t)\, e^{-t} \cos tx \, dt = 2(n+1) \frac{d}{dx}\left[x \left(1+x^2\right)^{-(n+2)}\right]$$

En déduire une relation entre $t^2 Q_n(t)$, $Q_{n+1}(t)$ et $Q_{n+2}(t)$.

II.3. On pose $P_n(t) = \dfrac{Q_n(t)}{Q_n(0)}$ de sorte que $P_n(0) = 1$.

Etablir les relations :

$$P_{n+2}(t) = P_{n+1}(t) + \frac{t^2}{(2n+1)(2n+3)} P_n(t) \qquad (1)$$

$$P_{n+1}(t) - P'_{n+1}(t) = \frac{t}{2n+1} P_n(t) \qquad (2)$$

Calculer P_0 , P_1 , P_2 , P_3 .

Quel est le degré de P_n ?

II.4. On pose $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n}\, t^k$

a) Montrer que l'on a $0 \leqslant \alpha_{k,n} \leqslant \frac{1}{k!}$

b) Soit $t \geqslant 0$ fixé ; montrer que la suite $n \mapsto P_n(t)$ est monotone et convergente ; soit $L(t)$ sa limite. On définit ainsi une application L de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

c) Démontrer l'égalité $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2(2n+1)}$

d) En déduire, pour n et k entiers positifs quelconques, les inégalités

$0 \leqslant P_{n+k}(t) - P_n(t) \leqslant \frac{t^2 e^t}{2(2n-1)}$. Montrer que la suite de fonctions P_n converge uniformément vers la fonction L sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

e) Montrer que la suite de fonction P'_n converge uniformément vers la fonction L sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

Etablir que pour $t \geqslant 0$ $\quad L(t) = e^t$.

II.5. Soit z un complexe donné.

Montrer que $\left|e^z - P_n(z)\right| \leqslant \left| e^{|z|} - P_n(|z|)\right|$

Quelle est la limite de $P_n(z)$ quand n tend vers l'infini, z restant fixé ?

III. On pose $f_n(t) = e^{-t} P_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

III.1. Montrer que l'on a, pour tout t réel :

$$f'_{n+1}(t) = -\frac{t}{2n+1} f_n(t)$$

III.2. Etudier les variations des fonctions f_0 , f_1 , f_2 , f_3 et les représenter graphiquement sur une même figure en précisant leur position relative.

III.3. En supposant que $f_{2n}(t)$ est strictement positive pour tout réel, montrer que f_{2n+1} admet un zéro réel unique γ_n et que f_{2n+2} n'a aucun zéro réel.

III.4. Donner l'allure de la représentation graphique de f_{2n} et de f_{2n-1} ; on précisera la position relative des deux courbes.

III.5. Etudier la limite de γ_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quel est le sens de variation de la suite γ_n ?

****
***
•

P′

page 86 1986 Concours commun Centrale-Sup.Elec.
Math I.Option P'